

Proprietăți ale integralei definite din funcții pare (impare)

Prof. Tatiana Cristea
C. N. "Nicolae Titulescu"

În acest studiu vom prezenta într-o formă teoretică unele probleme interesante privind integrala definită și o metodă de calcul a unor integrale definite pentru unele clase de funcții integrabile.

Definiția 1. Fie $b \in R, D$ inclusă în R , și $f: E \rightarrow R$. Spunem că funcția f este (b, D) – pară, dacă și numai dacă :

- 1) $\forall x \in D$ rezultă $-x \in D$;
- 2) $\forall x \in D$ rezultă $b - x \in E$ și $b + x \in E$;
- 3) $f(b - x) = f(b + x), \forall x \in D$;

Definiția 2. Fie $b \in R, D$ inclusă în R , și $f: E \rightarrow R$. Spunem că funcția f este (b, D) – impară, dacă și numai dacă :

- 4) $\forall x \in D$ rezultă $-x \in D$;
- 5) $\forall x \in D$ rezultă $b - x \in E$ și $b + x \in E$;
- 6) $f(b - x) = -f(b + x), \forall x \in D$;

În particular pentru $b = 0$ și $D = E$ se obțin definițiile funcțiilor pare respective impare. Dacă $a \in R_+^*$ și $D = [-a, a]$ în loc de funcție $(b, [-a, a])$ – pară sau de funcție $(b, [-a, a])$ – impară vom spune funcție (b, a) – pară respectiv funcție (b, a) – impară.

Propoziția 1. Fie $f: [a, b] \rightarrow R$ o funcție continuă și $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a-b))$ – pară. Atunci :

- 1) $\int_a^b f(x)dx = 2 \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x) dx$;
- 2) $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(a+b) \int_a^b f(x)dx$;

Demonstrație. 1) Deoarece f este $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a-b))$ – pară rezultă că $f(\frac{1}{2}(a+b)-x) = f(\frac{1}{2}(a+b)+x), \forall x \in [0, \frac{1}{2}(b-a)]$ dacă și numai dacă $f(a+b-x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)dx = \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(a+b-x)dx$ și dacă facem substituția $x = a+b-t$ cu $t \in [\frac{1}{2}(a+b), b]$ obținem: $\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(a+b-x)dx = \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(t)dt$ și deci $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)dx = 2 \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)dx$.

2) Cu ajutorul substituției $x = a+b-t, t \in [a, b]$ rezultă : $\int_a^b xf(x)dx = -\int_a^b (a+b-t)f(a+b-t)(-dt) = (a+b) \int_a^b f(a+b-t)dt - \int_a^b tf(a+b-t)dt = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt$ de unde obținem $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(a+b) \int_a^b f(x)dx$.

Propoziția 2. Fie $f: R \rightarrow R$ o funcție continuă. Dacă este (b, a) – pară (respectiv (b, a) – impară) atunci : $\int_{b-a}^{b+a} f(x)dx = 2 \int_b^{b+a} f(x)dx$ respectiv $\int_{b-a}^{b+a} f(x)dx = 0$.

Demonstrație. Deoarece f este (b, a) – pară rezultă că $f(b-x) = f(b+x)$, $\forall x \in [-a, a]$. Deci

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)dx = \int_{b-a}^b f(x)dx + \int_b^{b+a} f(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)dx + \int_{b+a}^b f(2b-t)(-dt) =$$

$$\int_b^{b+a} f(x)dx + \int_b^{b+a} f(b+(b-t))dt = \int_b^{b+a} f(x)dx + \int_b^{b+a} f(b-(b-t))dt =$$

$$\int_b^{b+a} f(x)dx + \int_b^{b+a} f(t)dt = 2 \int_b^{b+a} f(x)dx.$$

Propoziția 3. Dacă $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt de aceeași (b, a) – paritate atunci produsul fg este o funcție (b, a) – pară iar dacă f, g sunt de (b, a) – parități diferite atunci produsul fg este o funcție (b, a) – impară.

Demonstrație. Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ atunci $f(b-x) = \varepsilon_1 f(b+x)$, $g(b-x) = \varepsilon_2 g(b+x)$, $\forall x \in [-a, a]$. Dacă f și g sunt de aceeași (b, a) – paritate atunci produsul $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ iar dacă sunt de (b, a) – parități diferite atunci produsul $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$. Deci $(fg)(b-x) = f(b-x)g(b-x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f(b+x)g(b+x)$ de unde rezultă enunțul.

Propoziția 4. Pentru orice funcție $f: [b-a, b+a] \rightarrow \mathbb{R}$ există o funcție g , (b, a) – pară și o funcție h , (b, a) – impară astfel încât $f = g + h$.

Demonstrație. Fie $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(2b-x))$ și $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(2b-x))$. Avem :

$g(b-x) = \frac{1}{2}(f(b-x) + f(2b-(b-x))) = \frac{1}{2}(f(b-x) + f(b+x))$, $g(b+x) = \frac{1}{2}(f(b+x) + f(2b-(b+x))) = \frac{1}{2}(f(b+x) + f(b-x))$, de unde se observă că $g(b-x) = g(b+x)$ și $h(b-x) = \frac{1}{2}(f(b-x) - f(2b-(b-x))) = \frac{1}{2}(f(b-x) - f(b+x))$, $h(b+x) = \frac{1}{2}(f(b+x) - f(2b-(b+x))) = \frac{1}{2}(f(b+x) - f(b-x))$ de unde obținem că $h(b-x) = -h(b+x)$. Totodată se observă că $f = g + h$ și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Aplicația 1. Să se calculeze $I_n = \int_0^1 \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x - 3}{(x^2 - x + 1)^n} dx$, n număr natural.

(Problema 17036, din G.M.)

Soluție. Se arată că funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + 1$ este $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – pară iar funcția $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 3$ este $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – impară și prin urmare funcția $f = \frac{h}{g^n}$ este $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – impară și deci $I_n = 0$.

Aplicația 2. Să se demonstreze că $I_n = \int_0^1 (2x-1)^n e^{x-x^2} dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $n = 2k+1$.

(Problema 16993, din G.M., Florin Rădulescu)

Soluție. Se arată că funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x-1)^{2k+1}$ este $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – impară iar $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{x-x^2}$ este $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – pară, rezultă că produsul $f = gh$ este o funcție $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – impară, deci $I_n = 0$, pentru $n = 2k+1$.

Propoziția 5. Fie $f, g : [b-a, b+a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue și f o funcție (b, a) – pară, atunci :

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)g(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)(g(x) + g(2b-x))dx.$$

Demonstrație. Conform propoziției 4 există $u, v : [b-a, b+a] \rightarrow \mathbb{R}$, în care u este (b, a) – pară iar v este (b, a) – impară și $g = u + v$. Avem :

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)g(x)dx = \int_{b-a}^{b+a} f(x)(u(x) + v(x))dx = \int_{b-a}^{b+a} f(x)u(x)dx + \int_{b-a}^{b+a} f(x)v(x)dx =$$

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)u(x)dx = 2 \int_b^{b+a} f(x)u(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)(g(x) + g(2b-x))dx.$$

Aplicația 3. Dacă f este continuă pe $[-a, a]$ și $(0, a)$ – pară (de fapt pară) atunci

$$\int_{-a}^a f(x)(e^{kx} + 1)^{-1} dx = \int_0^a f(x)dx.$$

(Problema 17038, din G.M., V. Țifui)

Soluție. Fie $g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (e^{kx} + 1)^{-1}$ atunci $g(-x) = (e^{-kx} + 1)^{-1}$ de unde rezultă că $g(x) + g(-x) = 1$. Din propoziția precedentă avem :

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_0^a f(x)(g(x) + g(-x))dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Aplicația 4. Dacă funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface condiția $g(x) + g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ să se calculeze $\int_{-a}^a g(x)dx$. (Problema 16024, din G.M., Gh.Fătu)

Soluție. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este $(0, a)$ – pară, $\forall a \in \mathbb{R}_+$, deci suntem în condițiile propoziției precedente. Avem :

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_0^a f(x)(g(x) + g(-x))dx = \int_0^a 1 \cdot 1dx = a.$$

Aplicația 5. Fie $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$. Să se calculeze $\int_0^\pi f(x)dx$. (Problema 16960 din G.M., V. Țifui)

Soluție. Fie $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$ este $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - pară și aplicând propoziția precedentă avem :

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi xg(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi g(x)(x + \pi - x)dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi g(x)dx =$$

$$= \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (g(x) + g(\frac{3\pi}{2} - x)) dx = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Propoziția 6. Fie $f, g : [b-a, b+a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue și f o funcție (b, a) – impară, atunci :

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)g(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)(g(x) - g(2b-x))dx.$$

Demonstrație. Conform propoziției 4 există $u, v : [b-a, b+a] \rightarrow \mathbb{R}$, în care u este (b, a) – pară iar v este (b, a) – impară și $g = u + v$. Avem :

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)g(x)dx = \int_{b-a}^{b+a} f(x)(u(x) + v(x))dx = \int_{b-a}^{b+a} f(x)u(x)dx + \int_{b-a}^{b+a} f(x)v(x)dx =$$

$$\int_{b-a}^{b+a} f(x)v(x)dx = 2 \int_b^{b+a} f(x)v(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)(g(x) - g(2b-x))dx.$$

Aplicația 6. Fie $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$. Să se calculeze $I = \int_0^{2\pi} x^2 f(x) dx$.
(Problema 17510 din G.M., Gh. Marghescu)

Soluție. Evident $f(\pi - x) + f(\pi + x) = 0, \forall x \in [-\pi, \pi]$, ceea ce ne arată că f este (π, π) -impară și folosind propoziția precedent rezultă că

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{2\pi} f(x)(x^2 - (2\pi - x)^2) dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)(4\pi x - 4\pi^2) dx = \\ &= 4\pi \int_{\pi}^{2\pi} x f(x) dx - 4\pi^2 \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx. \text{ Se arată că } f \text{ este } \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\text{-pară și atunci din propoziția 5} \\ \text{avem : } \int_{\pi}^{2\pi} x f(x) dx &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(x)(x + 3\pi - x) dx \pi = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(x) dx, \text{ deci } I = 12\pi^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(x) dx - \\ &4\pi^2 \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx, \text{ unde } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \text{ se calculează prin metodele obișnuite.} \end{aligned}$$

Aplicația 7. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+tgx)}{\sin 2x + \cos 2x} dx$. (Problema 17771 din G.M.)

Soluție. Fie $f : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x}$ și $f(\frac{\pi}{8} + x) - f(\frac{\pi}{8} - x) = 0$, ceea ce ne arată că f este $(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ -pară, deci

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \ln(1 + tgx) dx &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)(\ln(1 + tgx) + \ln 2 - \ln(1 + tgx)) dx = \\ &= \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(2x - \frac{\pi}{4})} dx, \text{ iar aceasta se calculează prin metode obișnuite.} \end{aligned}$$

Bibliografie

D.M.Bătinețu, I.V.Maftai, I.M.Stancu-Minasian, Exerciții și problem de analiză matematică pentru clasele a XI a și a XII a, Editura Didactică și Pedagogică București, 1981, pag.115